

Niveau(x) d'enseignement: 3
Centre d'intérêt: 841

Numéro EDUQ : 8870468

Bednarz, Nadine.

Problèmes de représentation en arithmétique au primaire : rapport de recherche / Nadine Bednarz. -- [Montréal] : UQAM, CIRADE, 1983.
22 f. : ill. ; 28 cm.

Références: RC-RR-001. Bibliogr.: f. 20-21. Notes bibliogr.: f. 22.

Vedette(s)-secondaire(s): Université du Québec à Montréal. Centre interdisciplinaire de recherches sur l'apprentissage et le développement en éducation

Descripteur(s): Mathématiques * Arithmétique * Evaluation du matériel didactique * Primaire (Ordre d'enseignement)

Identificateur(s) de sujet: Représentation

L'auteure s'interroge sur la portée des représentations données dans les manuels et le matériel utilisé en mathématique pour l'apprentissage des concepts arithmétiques (nombre, opération...). Elle fait état de la recherche à la fin de la première année (juin 1982) et de la seconde année (juin 1983). Il ressort de ces recherches que les enfants ne semblent pas interpréter les représentations proposées, provenant des manuels scolaires, dans le sens souhaité par les auteurs de manuels. Les interprétations que les enfants donnent à ces représentations aident à comprendre les difficultés et les erreurs que les enfants font en arithmétique au primaire. Il y a une très grande difficulté chez les enfants à tous les niveaux du primaire, à se représenter, à schématiser un problème mettant en jeu une opération.

Type de document: r

**CENTRE INTERDISCIPLINAIRE DE RECHERCHES SUR
L'APPRENTISSAGE ET LE DEVELOPPEMENT EN EDUCATION**

girade



Université du Québec à Montréal

Problèmes de représentation en
arithmétique au primaire

Nadine Bednarz

Rapport de recherche

Octobre 1983

CIRADE - UQAM

Référence RC-RR-001

TABLE DES MATIERES

	Page
I - PROBLEMATIQUE	3
A. Introduction	3
B. Premiers résultats	4
C. Questions	5
D. Cadre théorique sous jacent à la recherche	6
II - ETAT DE LA RECHERCHE A LA FIN DE LA 1ERE ANNEE (JUIN 1982)	7
A. Premières entrevues exploratoires et résultats	7
B. Situation de nos interventions par rapport au cadre théorique	8
C. Expérimentation	9
D. Résultats	9
III - ETAT DE LA RECHERCHE A LA FIN DE LA 2E ANNEE (JUIN 1983)	10
A. Situation de nos interventions par rapport au cadre théorique	10
B. Avancement sur le plan théorique à la fin de 1983	11
1. Typologie des représentations	11
2. Analyse conceptuelle des opérations arithmétiques	13
C. Avancement sur le plan expérimental à la fin de 1983	13
1. Expérimentation	13
2. Résultats	15
(a) Sur le rôle assuré par les représentations intermédiaires	15
- Support à l'équation	15
- Support au concept (situation)	17
(b) Sur les représentations spontanées des enfants (représentations d'un problème)	19
IV - CONCLUSIONS GENERALES	19
V - REALISATIONS DES MEMBRES DE L'EQUIPE EN RAPPORT AVEC CETTE RECHERCHE (1981-1983)	20
A. Communications et conférences	20
B. Publications	21
VI - REFERENCES	22

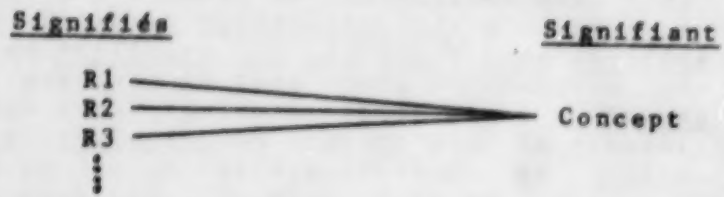
I. PROBLEMATIQUE

A. INTRODUCTION

La recherche passée menée par les deux chercheurs N. Bednarz et B. Janvier sur la compréhension de la numération au primaire [1] et leur travail mené en classe en arithmétique auprès de jeunes enfants (6 à 9 ans) [*] les ont amenés à s'interroger sur la portée des représentations dans l'apprentissage des concepts arithmétiques (nombre, opération...).

En regardant les manuels et autres matériels utilisés en mathématiques au Québec et en Amérique du Nord avec lesquels les enfants ont à travailler, nous avons été amenés à constater que les enfants sont soumis, et ceci très tôt, pour un même concept, à de multiples formes de représentations. Par exemple, pour représenter l'opération d'addition, on retrouvera dans les manuels des diagrammes ensemblistes, la droite numérique, des dessins statiques voulant suggérer une certaine action, des machines, des équations, etc...

De plus, la difficulté suscitée chez l'enfant par cette présence de multiples représentations pour un même concept



est accentuée par l'utilisation (phénomène contraire) d'une même représentation pour représenter des sens différents d'un même concept:



Ainsi, le guide pédagogique du MEQ sur les Nombres Naturels suggère l'utilisation d'une même représentation pouvant représenter plusieurs sens différents de l'opération de soustraction.

*- Bednarz, N. et Janvier, B. (1980-1983). Elaboration d'une séquence d'apprentissage au primaire favorisant la compréhension du nombre et de sa représentation par l'enfant. Projet expérimenté à la Commission Scolaire-St-Exupéry.

Exemple:



Cette représentation ensembliste est censée représenter autant pour l'enfant le sens comparaison/différence de la soustraction que le sens action d'enlever proprement dit et que le sens complément.

Par conséquent, si l'on regarde le matériel soumis aux enfants, l'enfant doit voir le même concept sous des représentations différentes. Mais y voit-il vraiment ce même concept? Par ailleurs, il doit pouvoir se représenter par un même schéma des sens différents du même concept. Mais chacun des sens de ce concept fait-il appel à la même représentation de la part de l'enfant? Un même schéma peut-il transporter tous les aspects d'un concept (par exemple, dynamique de la transformation additive versus statique de la réunion).

B. PREMIERS RESULTATS

Nous avons été amenés, en travaillant avec les enfants, à observer que diverses représentations d'un même concept étaient interprétées ou utilisées par les enfants de diverses façons et souvent même, pas dans le sens voulu ou souhaité (par l'auteur de manuels). Nous avons également observé que certaines représentations, qui se voulaient un support pour la résolution d'un problème mettant en jeu un certain concept, ne jouaient peut-être pas le rôle souhaité. De plus, dans un contexte d'apprentissage [2] nous avons pu observer que, pour parler ou traiter de concepts (nombre, opération), les enfants se construisent leurs propres représentations et les perfectionnent peu à peu. Le rapport complet qui devrait paraître en mai 84 sur le projet de recherche mené par les deux chercheurs, N. Bednarz et B. Janvier, dans le milieu scolaire (prise en charge complète de l'enseignement de la numération et des quatre opérations auprès d'un même groupe d'enfants pendant 3 ans) [*] permettra de détailler: a) ces représentations spontanées inventées par les enfants (pour les concepts de nombre et d'opération); b) comment ces représentations évoluent d'une représentation descriptive à une représentation plus schématique et opérante; c) quelle contribution ces représentations apportent à la perception, l'enrichissement du concept (nombre, opération).

*- Bednarz, N. et Janvier, B. (1980-1983). Elaboration d'une séquence d'apprentissage au primaire favorisant la compréhension du nombre et de sa représentation par l'enfant. Projet expérimenté à la Commission Scolaire St-Exupéry.

Cette étude apportera ainsi un premier éclairage important au problème de la représentation en enseignement des mathématiques, par l'observation unique sur une longue période de temps du développement chez l'enfant de systèmes de représentations en relation avec le développement de concepts.

C. QUESTIONS

Les observations faites en classe dans un contexte d'apprentissage (recherche sur la numération - N. Bednarz et B. Janvier) ou en situation d'entrevues (recherche sur les problèmes de représentation du nombre - N. Bednarz, M. Bélanger et B. Janvier), essayaient entre autres de répondre aux questions suivantes relatives à la portée des représentations en enseignement de l'arithmétique au primaire.

- (1) Les enfants sont-ils soumis (dans les manuels, tests...) souvent prématurément à des représentations ou à des symbolisations mathématiques inaccessibles ou inutiles [3] auxquelles ils ne peuvent réagir qu'en les ignorant ou par l'application ou l'utilisation d'une règle?
- (2) Quelle(s) interprétation(s) l'enfant donne-t-il véritablement aux multiples formes de représentation auxquelles il est soumis en arithmétique au primaire? Y voit-il la même chose? Y voit-il ce que l'adulte voudrait qu'il y voit?
- (3) Dans quelle mesure ces représentations données à priori sont-elles un support pour la compréhension d'un concept (par exemple, nombre, opération) ou le traitement de ce concept (résolution d'un problème, d'une situation mettant en jeu une opération)? Y a-t-il des représentations qui sont plus un support à l'apprentissage d'un concept que d'autres? Y a-t-il des représentations qui sont tout à fait inutiles ou nuisibles?
- (4) Quelles représentations spontanées les enfants se font d'un problème, d'une situation, mettant en jeu un concept (nombre, opération)?[*]

* - Nous répondrons à cette dernière question dans le cadre du projet Application en milieu scolaire d'une recherche sur la numération, de N. Bednarz et B. Janvier, projet qui donnera lieu à un rapport complet en mai 1984 [2].

Plus particulièrement, nous cherchions dans cette recherche à répondre aux questions suivantes:

Représentations

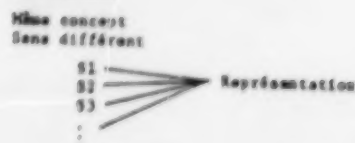


Grande variété de représentations (signifiées) pour un même concept (signifiant)?

QUESTIONS:

1. Est-ce que l'enfant y voit la même chose?
2. Quelles interprétations l'enfant donne-t-il à ces représentations?
3. Jusqu'à quel point il les utilise dans la résolution d'un problème, d'une situation? Quelles sont les représentations susceptibles d'être un support?

Signifiants



Même représentation (signifié) pour plusieurs sens différents (signifiants)?

QUESTIONS:

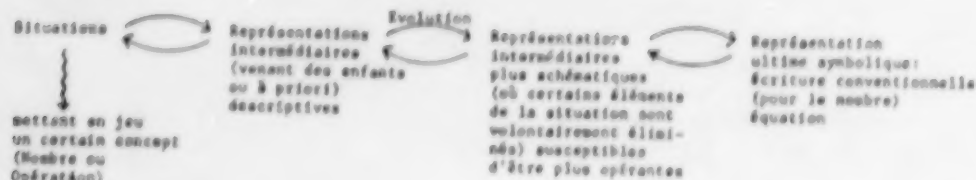
1. Étant donné des problèmes/situations mettant en jeu des sens différents du même concept (opération), est-ce que l'enfant va utiliser la même représentation?
2. Dans un contexte statique ou dynamique (2 sens du concept d'opération), l'enfant utilisera-t-il la même représentation?
3. Y a-t-il des aspects du concept (opération) plus difficiles que d'autres à se représenter? [4]

D. CADRE THEORIQUE SOUS-JACENT A LA RECHERCHE

Beaucoup de recherches en didactique des mathématiques reconnaissent les difficultés rencontrées par les enfants du primaire dans la résolution de problèmes mettant en jeu des opérations arithmétiques de base (+, -, x, ÷). Citons entre autres la recherche effectuée au secondaire, en Angleterre, auprès d'une grande population d'enfants, qui montre qu'à ce niveau encore un pourcentage assez important d'étudiants du secondaire ne reconnaissent pas dans certains contextes l'opération nécessaire à la résolution du problème [5].

Beaucoup de chercheurs se sont penchés sur ces difficultés reliées à la résolution de problèmes en analysant la complexité des problèmes les uns par rapport aux autres et en se centrant sur la structure conceptuelle associée. Ainsi, les travaux de G. Vergnaud [4] ont permis de classifier les problèmes mettant en jeu des structures additives, ainsi que les problèmes mettant en jeu des structures multiplicatives selon leur complexité. Cependant, peu de recherches prennent en considération ou se centrent sur le problème de représentation, même si elles reconnaissent le rôle que peut jouer cette représentation. La représentation a un rôle à jouer dans la conceptualisation et, inversement, la compréhension de plus en plus profonde d'un concept a un impact sur la façon de le représenter. Ces deux éléments sont étroitement liés. Nous pensons que certaines difficultés des étudiants dans la résolution de problèmes ou de situations mettant en jeu une opération arithmétique (dans ses différents sens possibles) proviennent de l'incapacité de ces étudiants à se représenter cette situation pour pouvoir ensuite la résoudre. La représentation devrait être un outil pour permettre à l'enfant de percevoir dans la situation l'opération présente, permettant ainsi ensuite de la résoudre.

La représentation a donc un rôle important à jouer dans la conceptualisation (perception des éléments importants du concept et traitement). Cette recherche sur les problèmes de représentation en arithmétique au primaire s'appuie donc sur le cadre théorique suivant relatif à la représentation:



Les représentations intermédiaires doivent être un support à la compréhension ou au traitement du concept. Pour être bonnes, l'enfant doit pouvoir les utiliser pour se représenter une situation, et inversement, il doit pouvoir les traduire et au besoin revenir à une situation. C'est donc sur l'étude de ces représentations intermédiaires que se centre notre recherche, parce qu'elles ont, selon nous, un rôle important à jouer dans la conceptualisation de l'enfant et dans le passage du référent (situation) au signifiant.

II. ETAT DE LA RECHERCHE A LA FIN DE LA 1ERE ANNEE (JUN 1982)

A. PREMIERES ENTREVUES EXPLORATOIRES ET RESULTATS

Quelques entrevues exploratoires sont effectuées en 1981 (automne) auprès d'enfants de 6 à 10 ans (entrevues individuelles ou entrevues auprès de petits groupes de 2 ou 3 enfants). Différentes représentations, issues des manuels scolaires pour le concept d'opération, sont choisies et proposées aux enfants. Nous cherchons à voir dans ces entrevues, de façon exploratoire, quelles interprétations les enfants donnent à ces représentations et jusqu'à quel point ils les utilisent.

Trois types d'entrevues seront effectuées à cette fin:

- Discussion libre avec les enfants relativement à différentes représentations.
- Même résolution à l'intérieur de diverses représentations: i) représentations symboliques ultimes (équations) du type $a-b=?$, $a+?=b$, $a-?=b...$ et ii) autres représentations (diagrammes ensemblistes, dessin...) correspondant au même problème à résoudre.
- On propose à l'enfant une équation à résoudre avec support (représentation ensembliste, machine...). Les enfants résolvent l'équation et alors, de mémoire, on leur demande de décrire l'image qu'il y avait avant.

Ces premières entrevues mettent en évidence: a) la difficulté des enfants à résoudre des équations du type $a+?=b$ (par exemple, correspondant à un aspect des opérations: complément ou transformation à trouver dans le cas de la soustraction) et b) le peu de soutien apporté par les représentations proposées (ensembles, dessins, ...) qui se veulent un support à la résolution de telles équations. En effet, les enfants n'utilisent manifestement pas l'image qui leur est présentée. Ils travaillent uniquement sur l'équation, la résolvent ou non et se souviennent très peu après coup du dessin qui était présent préalablement (lorsqu'on leur demande de dire de mémoire ce qu'il y avait avant sur l'image).

Ces résultats purement exploratoires nous ont conduits dans un premier temps à nous interroger plus particulièrement sur le problème de la représentation d'une opération, sous son aspect transformation:

Etat initial $\xrightarrow{\quad ? \quad}$ Etat final

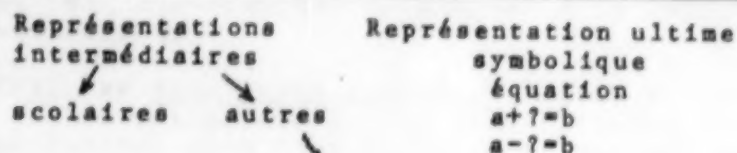
Quelle transformation s'est effectuée?

Cette habileté à se représenter une transformation apparaît importante en arithmétique. Elle intervient dans la compréhension de problèmes, de situations mettant en jeu un certain aspect des opérations.

Exemples: Jean a 3 billes dans sa poche. Son ami lui en apporte. Il en a maintenant 8. Qu'est-ce que son ami lui a apporté?
Maman a 27 beignes. Les enfants en mangent. Il y en a maintenant 9. Combien les enfants ont-ils mangé de beignes?

B. SITUATION DE NOS INTERVENTIONS EN 1981 PAR RAPPORT AU CADRE THEORIQUE

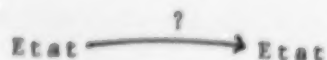
Correspondant à un même concept: opération de soustraction sous l'aspect transformation à reconstituer



- Quelle interprétation les enfants donnent à ces représentations?
- Sont-ils un support à la représentation par l'enfant de la transformation?
- Y a-t-il une ou des représentations meilleures que d'autres?

Une expérimentation est alors construite pour essayer de répondre à ces questions.

Cinq représentations seront retenues sur le modèle



Deux de ces représentations sont très près du contexte scolaire et on les retrouve dans les manuels (équation et diagramme ensembliste). Les trois autres (modèle photos ou bonhommes apportant des objets) ont été retenues parce qu'elles pouvaient être, selon nous, un plus grand support à la reconstitution de la transformation (ayant été développées par des enfants en cours de situations d'apprentissage mettant en jeu une transformation[*]).

C. EXPERIMENTATION

Les items construits ont été administrés sous forme écrite à toute une classe de 1ère, 2e et 3e années (environ 24 enfants par niveau), par petits groupes de 4-5 enfants. Des entrevues individuelles ont ensuite été réalisées avec quelques enfants choisis dans chacun des groupes d'âge (4 par niveau). Elles portaient sur quelques-uns des items et cherchaient à voir quelle interprétation les enfants leur donnent.

D. RESULTATS

Les résultats détaillés de cette première étude ont été publiés (voir [7] et [8]). Nous ne les reprendrons donc pas ici. Nous dégageons simplement les observations que cette étude nous a conduites à faire (les données en nombre ne sont pas suffisantes pour en tirer des conclusions).

- (1) Nous constatons une difficulté chez les très jeunes enfants (6-7 ans) à reconstituer une transformation, et ce, quelle que soit la représentation proposée, bien qu'à un degré moindre pour les représentations "photos" et "bonhommes" qui semblent plus suggérer une action. La représentation à ce niveau ne s'avère pas un support à la représentation de la transformation.
- (2) De plus, les procédures erronées utilisées par les enfants sont celles retrouvées dans d'autres études [9]: additionner l'état initial et l'état final ou ne marquer que l'état final. Elles illustrent le fait que les enfants très jeunes ne semblent prendre en considération que des états et non pas la transformation faisant passer d'un état à un autre.

*- N. Bednarz et B. Janvier. Elaboration d'une séquence d'apprentissage au primaire favorisant la compréhension du nombre et de sa représentation par l'enfant. Projet de recherche.

- (3) Chez les enfants plus vieux (8-9 ans), il semble y avoir évolution. Ici, les enfants semblent plus reconstituer la transformation, surtout dans le cas des représentations "photos" et "bonhommes".

Ces résultats nous conduisent à formuler trois hypothèses pour la poursuite du travail;

- (a) Interprétation dans les termes présentés? Certaines représentations non scolaires (par exemple, "photos", "bonhommes") provoquent une réflexion, un changement dans la procédure des enfants, ou une interprétation dans les termes proposés.
- (b) Support à la représentation de l'opération sous l'aspect transformation? Certaines représentations (par exemple, ensembles) évoquent plus l'aspect statique d'une opération (réunion...) alors que d'autres (par exemple, photos, bonhommes) évoquent plus l'aspect dynamique de l'opération (transformation).
- (c) Pertinence de certaines représentations dans les manuels à un très jeune âge pour l'aspect transformation? L'enfant très jeune (1ère et 2e années) semble avoir beaucoup de difficultés à reconstituer la transformation, quelle que soit la représentation. Les nombreuses représentations (machines, flèches, équations $a+b=c$...) mettant en jeu une transformation, auxquelles l'enfant très jeune est soumis dans les manuels, sont-elles dans ces conditions accessibles à l'enfant? N'a-t-il alors recours qu'à des règles purement mécaniques, ne percevant pas la dynamique de la représentation fournie.

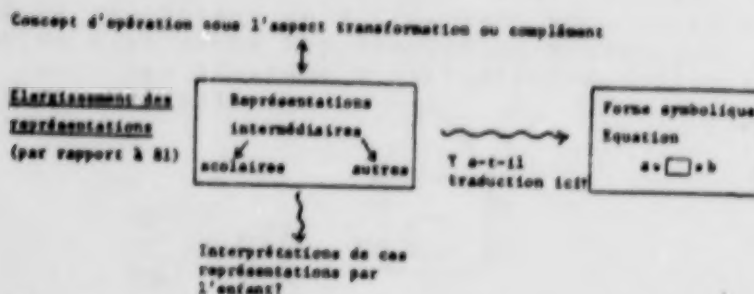
III. ETAT DE LA RECHERCHE A LA FIN DE LA 2E ANNEE (JUIN 1983)

A. SITUATION DE NOS INTERVENTIONS PAR RAPPORT AU CADRE THEORIQUE

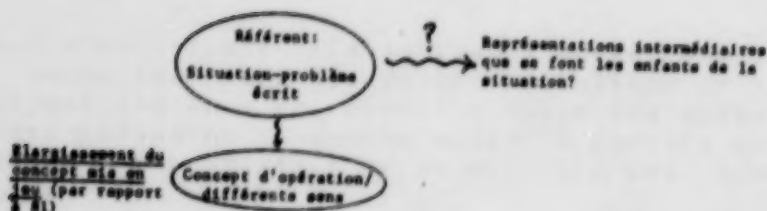
- (1) Nous pousserons plus loin notre réflexion face à la représentation d'une opération sous l'aspect transformation en élargissant les représentations intermédiaires choisies: représentations scolaires (une étude systématique des manuels sera effectuée à cette fin) et représentations autres (sur le modèle bandes dessinées issues des représentations photos et bonhommes) susceptibles de suggérer une transformation. L'expérimentation construite aura alors les mêmes préoccupations: quelles interprétations les enfants donnent à ces diverses représentations? Quelles sont les représentations intermédiaires susceptibles d'être un support à la compréhension de situations mettant en jeu une transformation et par suite à leur résolution?
- (2) De plus, notre étude des problèmes de représentation d'une opération sera élargie de façon exploratoire, en prenant en

considération d'autres sens possibles de ce concept (réunion, comparaison, transformation...).

(1)



(2)



B. AVANCEMENT SUR LE PLAN THEORIQUE A LA FIN DE 1983

1. Typologie des représentations

Afin de répondre à (1), une étude systématique des représentations des opérations présentes dans les manuels sera effectuée. Celles-ci seront répertoriées et classifiées. Cette classification nous conduira à faire une typologie des représentations graphiques relatives au concept d'opération. Nous distinguons trois grands types de représentations:

- (1) les représentations purement symboliques (Exemple: des équations $a + ? = b...$);
- (2) les représentations "picturales" cherchant à aider l'élève à percevoir différents aspects des opérations (Ainsi, les machines et les flèches cherchent à illustrer la transformation; les ensembles, la réunion; la droite numérique des états et des déplacements.);
- (3) les représentations symboliques (équations) accompagnées d'une autre représentation qui se veut un support à la résolution de l'équation.

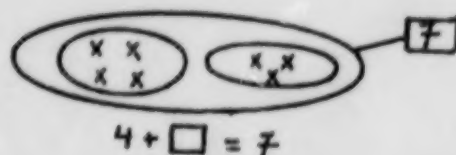
Nous avons classifié ces représentations "support" en trois sous-catégories:

- a) les "supports superflus": ceux qui sont censés servir de support à la résolution de l'équation, mais en fait n'ont aucune relation avec cette représentation symbolique et de ce fait n'aident pas l'enfant à résoudre l'équation symbolique. Ainsi, selon le manuel,

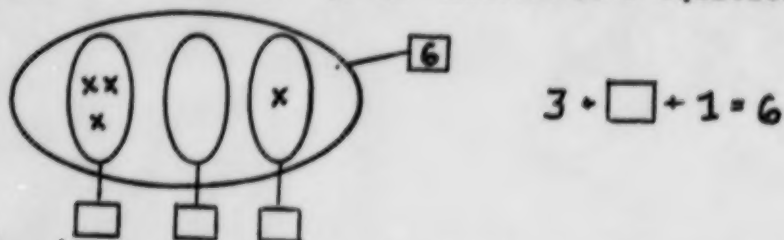


cette représentation se veut un support à la résolution de l'équation $2+?=7$.

- b) les "supports-solution": ils mettent l'accent sur la correspondance souhaitée entre l'équation symbolique et le support. Une correspondance un à un, complète entre les symboles et le support, est présentée et aucune activité mentale ou processus de résolution n'est exigée. Cette activité est court-circuitée. Ainsi,



- c) les "supports-reconstruction": ils exigent la même stratégie au niveau du support qu'au niveau de l'équation formelle. Ainsi,



De plus, nous ajouterons d'autres représentations qui ne sont pas utilisées dans les manuels et qui proviennent soit de la création spontanée d'enfants en situation d'apprentissage, soit d'un souci de recherche de représentations plus évocatrices d'une certaine transformation dynamique (exemple de bandes dessinées plus ou moins schématiques).

Schéma identifiant les différentes représentations
retenues pour l'expérimentation

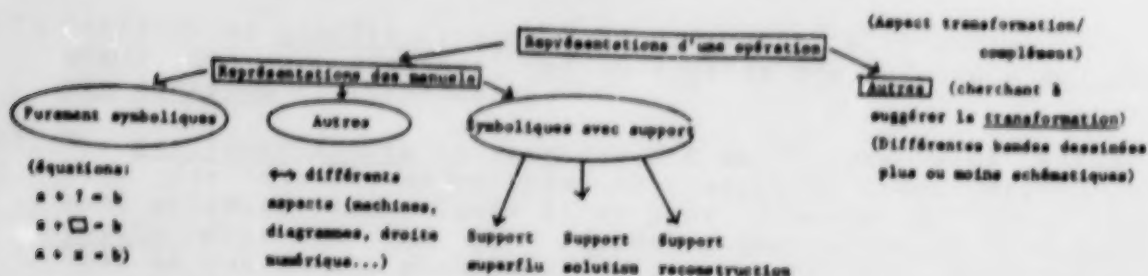


Figure 1

2. Analyse conceptuelle des opérations arithmétiques

Afin d'explorer (2) - (réf. p.11), une analyse conceptuelle de chacune des opérations arithmétiques (sens) sera effectuée mettant en évidence différents sens possibles.

<u>Addition</u>	- réunion - comparaison - transformation: action d'ajouter
<u>Soustraction</u>	- transformation: action d'enlever - comparaison/différence - complément - transformation à reconstituer
<u>Multiplication</u>	- action répétée - taux: - disposition groupement - disposition tableau - comparaison "fois plus"
<u>Division</u>	- partage - regroupement - reconstitution d'une transformation

Figure 2

Une banque de problèmes écrits sera alors élaborée mettant en jeu ces différents sens.

C. AVANCEMENT SUR LE PLAN EXPERIMENTAL A LA FIN DE 1983

1. Expérimentation

Trois types d'items seront construits en accord avec les questions et le cadre théorique identifiés précédemment.

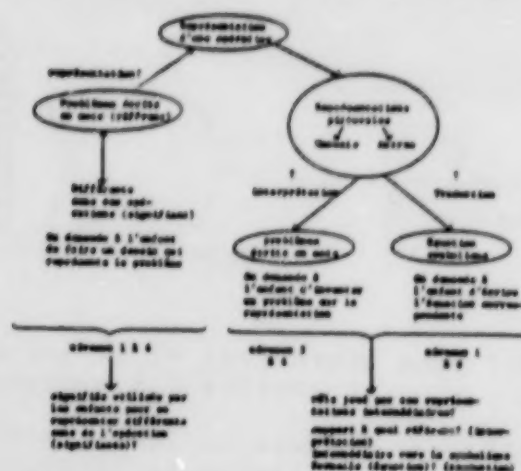
- (1) Différentes représentations sont présentées à l'enfant (réf. Figure 1) et on demande aux enfants d'inventer un problème pour un ami à partir de chacune de celles-ci.
- (2) Différentes représentations sont présentées à l'enfant (les mêmes que précédemment) et on demande aux enfants d'écrire une équation correspondante.
- (3) Des problèmes écrits correspondant à différents sens possibles des quatre opérations arithmétiques (réf. Figure 2) sont présentés aux enfants et on leur demande de faire un dessin pour un ami pour l'aider à comprendre le problème. Dans le cas de ces problèmes écrits, on retrouve deux types de problèmes: pour certains problèmes, les enfants doivent voir une action se déroulant dans le temps; pour d'autres, les enfants doivent voir des états statiques.

Tous ces items ont été administrés sous forme écrite de la 1ère à la 6e années (environ 45 enfants par niveau). On cherchait à voir pour (1) et (2): a) quelle(s) interprétation(s) les enfants donnent à ces représentations? b) quelle traduction ils font en symbolique formelle (équation)? c) y voient-ils ce que l'auteur de manuels (pour les représentations des manuels) voudrait qu'ils y voient? et d) parmi ces représentations, y en a-t-il qui sont un meilleur support à la représentation de certains aspects des opérations (transformation par exemple)?

Dans le cas de l'item (3), on cherchait à voir: a) quelles représentations "spontanées" les enfants utilisent pour se représenter une situation mettant en jeu un certain sens d'une opération?; b) s'ils utilisent la même représentation dans un contexte statique versus dynamique?; et c) s'il y a des contextes plus difficiles que d'autres à se représenter (par exemple, l'aspect transformation à reconstituer)?

N.B.: Nous avons essayé de minimiser dans la formulation des problèmes écrits les variables formulation linguistique, grandeur des nombres mis en jeu (les nombres choisis étaient petits) et nature des nombres mis en jeu (les valeurs étaient presque toujours discrètes).

Tableau résumant les différentes interventions en 1982



2. Résultats.

Les résultats de cette 2^e étude sur les problèmes de représentation d'une opération ont donné lieu à une présentation à la 7^e rencontre du International Group for the Psychology of Mathematics in Education (PME), en juillet 83 (Israël). Ils seront repris dans un article en préparation. Nous donnerons seulement ici les principaux résultats relatifs à cette expérimentation.

(a) Résultats sur le rôle assuré par les représentations intermédiaires

- Support à l'équation: Traduction en symbolique formelle (équation): la représentation est-elle un support au passage à l'équation?

Prenons l'exemple de la représentation suivante (tirée d'un manuel scolaire, 2^e année):



Cette représentation se veut, selon le manuel, un support à la résolution de l'équation $2+?=7$. Nous avons qualifié ce support, dans notre classification des manuels, de "support-reconstruction". Voyons comment les enfants traduisent cette représentation (quelle équation ils lui associent, selon le niveau).



Cette même courbe se retrouvera pour toutes les représentations présentées à l'enfant.

- (1) Ainsi, en 1ère année, on assiste chez les jeunes enfants à une interprétation majoritaire ensembliste, influence du curriculum de 1ère année en mathématiques (où les enfants travaillent l'addition via les diagrammes ensemblistes). Les enfants font une correspondance directe dessin équation, sans reconstruction.

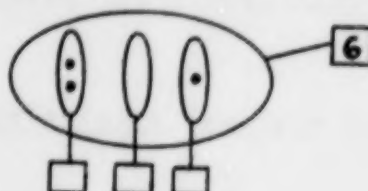
Exemple de réponses: $1+1=2$ (1 chien + 1 chien = 2 chiens)
 $7+2=9$ (7 chiens + 2 chiens = 9 chiens)

Peu d'enfants voient à ce niveau une transformation; ils combinent les états. Ce "pattern" se retrouve dans tous les items (pour toutes les représentations) présentés à ce niveau et non discutés ici. On retrouve donc les difficultés déjà observées pour le jeune enfant à reconstituer une transformation ($a+b=b$), via une représentation. Celui-ci ne travaille que sur des états.

- (2) En 2e année, l'interprétation des enfants (majoritaire, dans les termes $5+2=7$, $7-5=2$) correspond également au curriculum à ce niveau (accent mis sur la soustraction). En 3e, 4e et 5e années, les résultats restent stables (même interprétation). En 6e année, on assiste cette fois-ci soit à une interprétation dans les termes ensemblistes, soit à une interprétation dans les termes de transformation qu'on reconstitue. Le même "pattern" semble là encore se retrouver pour toutes les représentations présentées.
- (3) Au moins 30% des enfants, et ceci pour toutes les classes, donnent une interprétation autre que celle souhaitée par l'auteur ("équation $a+b=b$ "), et même là, les enfants résolvent l'équation, mais ne donnent que très rarement une équation du type $a+b=b$.

- Support au concept (situation): Interprétation des représentations (invente un problème): les représentations intermédiaires sont-elles un support à l'apprentissage du concept d'opération? Sous quel aspect?

Prenons l'exemple de la représentation diagramme ensembliste présente dans les manuels scolaires de 1ère année.



Cette représentation se veut un support, selon le manuel, à la résolution de l'équation $2 + ? + 1 = 6$.

Interprétation des enfants

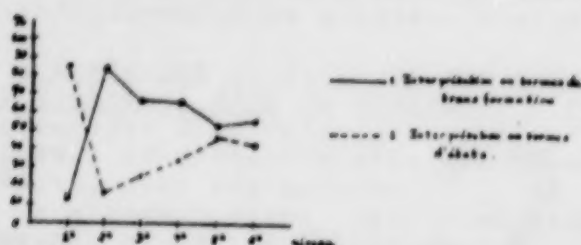
	<u>3e</u>	<u>4e</u>	<u>5e</u>	<u>6e</u>
Interprétation de l'ensemble intermédiaire comme un ensemble vide (<u>correspondance directe</u>).	25%	20%	42%	28%
Interprétation comme un ensemble à compléter (<u>reconstruction à faire</u>)	12.5%	39%	27%	37%
Interprétation: complètent le diagramme (<u>donnent la solution</u>)	34%	20%	14%	8%
Autres	28.5%	21%	17%	27%

Ainsi, un pourcentage assez important d'enfants à chaque niveau travaille dans les termes donnés (sans interprétation, reconstruction de ceux-ci): on prend tel quel le premier ensemble comme ayant deux éléments, le deuxième comme l'ensemble vide, le troisième comme ayant 1 élément. 6 est alors interprété soit comme le nom de l'ensemble (de façon majoritaire) et non comme cardinal, (Exemple: "Dans l'ensemble 6, il y a trois ensembles. L'ensemble A a 2 points, l'ensemble B a 0 point et l'ensemble C a 1 point. Dans l'ensemble 6, il y a 3 points"), soit comme cardinal; ils complètent alors le complément pour avoir 6 (exemple: "Il y a 3 sous-ensembles. Dans le premier, il y a 2 objet. Dans le deuxième, il y a 0 objet. Dans le troisième, il y a 1 objet. Combien d'objets sont nécessaires pour avoir 6?")

L'étude des problèmes inventés sur les autres représentations scolaires confirme qu'un pourcentage assez minime d'enfants interprète, à chaque niveau, la représentation dans le sens voulu par l'auteur. Par ailleurs, l'étude de ces problèmes nous révèle souvent des interprétations intéressantes pouvant expliquer certaines erreurs des enfants.

Ce que semble suggérer les autres représentations: bandes dessinées.

Interprétation des enfants (sur une des bandes dessinées)



- (1) Ainsi, les enfants de 1ère année interprètent chaque image indépendamment. Là encore, ils ne considèrent donc que des états et ne voient pas la transformation.

Cette interprétation se retrouve dans les problèmes inventés par les enfants. On retrouve donc là encore les observations faites en 1981: difficulté chez les enfants très jeunes à reconstituer une transformation, prise en considération par ces enfants seulement d'états. En 2^e année, les enfants semblent au contraire reconstituer la transformation dans la représentation présentée. En 3^e et 4^e années, on assiste là encore à une certaine stabilisation. En 5^e et 6^e années, on assiste à une interprétation états versus transformation à part égale (50%-50%).

- (2) Néanmoins, cette représentation semble plus évoquer une transformation chez l'enfant que les autres représentations proposées. Nous avons quatre exemples de bandes dessinées (plus ou moins schématiques). Les résultats semblent indiquer que plus la représentation est "abstraite" (dans le sens où elle s'est dépouillée d'éléments non pertinents à la perception d'une situation), plus celle-ci est susceptible d'évoquer chez l'enfant les éléments pertinents de la transformation.

- (b) Résultats sur les représentations spontanées des enfants (en partant d'un problème mettant en jeu différents sens possibles des opérations).

Cette partie de notre intervention exploratoire est pour l'instant difficile à analyser, les représentations inventées par les enfants étant plus des représentations de leur processus de résolution (souvent inspirées du curriculum scolaire: ensembles, équations...) que les représentations que l'enfant se fait du problème. Il faudra, lors de nos prochaines interventions en 1983-84, trouver un contexte motivant la production par l'enfant d'une telle représentation (production d'un message à des fins de communication à un autre enfant, traitement d'un problème complexe...).

Néanmoins, l'étude des productions des enfants dans ce contexte permet d'hors et déjà de remarquer l'inhabilité de presque tous les enfants à se représenter, à schématiser un problème. Cet item a en effet été très mal réussi, et s'est révélé très difficile pour les enfants. Cette habileté à schématiser un problème, étape pour nous très importante dans la compréhension et la résolution du problème, n'est pas actuellement développée dans le curriculum scolaire: on donne un problème aux enfants et on leur demande directement d'écrire l'équation et de trouver la réponse. Beaucoup de difficultés des enfants (choix non approprié de l'opération) proviennent peut être de cette incapacité à se représenter le problème pour pouvoir le traiter.

De plus, on observe dans un contexte continu, une tendance de tous les enfants à discrétiser le problème.

IV. CONCLUSIONS GENERALES

- (1) Les enfants ne semblent pas interpréter les représentations proposées, provenant de manuels scolaires, dans le sens souhaité par l'auteur de manuel. Ainsi, les représentations qualifiées par nous de "superflues" donnent lieu à toutes sortes d'interprétations des enfants. Les "représentations-solutions" ne font pas nécessairement appel à la correspondance directe souhaitée par l'auteur, et les enfants ne voient pas (ce n'est qu'une minorité qui le fait) dans les "représentations-reconstruction" une reconstruction à effectuer (les résultats précédents l'illustrent).
- (2) Si nous regardons de plus près les interprétations que l'enfant donne à ces représentations, nous pouvons mieux comprendre les difficultés et les erreurs que les enfants font en arithmétique au primaire. L'exemple du diagramme ensembliste et l'interprétation dans celui-ci de l'étiquette comme le nom de l'ensemble, et non son cardinal, explique en effet certaines erreurs des enfants dans les exercices et

tests arithmétiques.

- (3) Certaines représentations, autres que scolaires (bandes dessinées), actuellement non utilisées en enseignement des mathématiques semblent plus suggérer pour l'enfant la transformation dynamique de l'opérateur. Nous continuerons cette année à chercher des représentations intermédiaires susceptibles d'être un meilleur support à la perception de cet aspect dynamique d'une opération. Les représentations actuellement utilisées en enseignement des mathématiques dans les manuels étant statiques, elles n'aident pas l'enfant à percevoir cet aspect complexe de l'opération (transformation à reconstituer dans le temps).
- (4) Nous observons une très grande difficulté chez les enfants, à tous les niveaux, à se représenter, à schématiser un problème mettant en jeu une opération.

V. REALISATIONS DES MEMBRES DE L'EQUIPE
EN RAPPORT AVEC CETTE RECHERCHE (1981-1983)

A. COMMUNICATIONS ET CONFERENCES

- Bednarz, N. et Bélanger, M. (juillet 1983). "Problems of representation of an operation in elementary school arithmetic". 7e rencontre du Groupe International PME (Psychology of Mathematics in Education), Israel.
- Bednarz, N. et Janvier, B. (mai 1983). "L'apprentissage des quatre opérations au primaire: sens et traitement". APAME, Sherbrooke.
- Bednarz, N. et Janvier, B. (mars 1983). "Réflexions autour d'une expérimentation d'une séquence didactique avec les enfants du primaire cherchant à favoriser la compréhension du nombre et des quatre opérations". Séminaire du GEPREM (Groupe d'Etude sur les Problèmes de Représentation en Enseignement des Mathématiques), CIRADE.
- Bednarz, N. et Janvier, B. (octobre 1982). "Problèmes de représentation d'une transformation en arithmétique au primaire". Colloque du GDM (Groupe des Didacticiens de la Mathématique du Québec), Montréal.
- Bednarz, N. (novembre 1981). "Activités d'apprentissage sur le nombre et la numération". Animation d'une journée pédagogique, Greenfield Park.

B. PUBLICATIONS

- Bednarz, N. et Bélanger, M. (1983). "Problems of representation of an operation in elementary school arithmetic". Proceedings of the seventh International Conference of PME, Israel.
- Bednarz, N. et Janvier, B. (1983). "Problème de représentation d'une transformation en arithmétique chez les enfants du primaire". Journal de l'AMQ, septembre.
- Gendron, N. (1983). "Influence de la fonction symbolique comme instrument de pensée". Mémoire de maîtrise, UQAM (Directeur: Bednarz, N.), septembre.
- Bednarz, N. (1982). "Problèmes de représentation d'une transformation en arithmétique chez les enfants du primaire". Rapport et compte-rendu du GEPREM, Cahiers du CIRADE, octobre.
- Bednarz, N. et Janvier, B. (1982). "The understanding of numeration in primary school". Educational studies in Mathematics 13.
- Poirier, L. (1982). "Etude des représentations graphiques présentes dans les tests scolaires". Rapport et compte-rendu du GEPREM, Cahiers du CIRADE, mars.
- Bednarz, N., Bélanger, M. et al. (1981). "Un exemple de sur-symbolisation dans l'enseignement des mathématiques". Instantanés Mathématiques 18.

C. AUTRES

- Equipe de la Représentation des Connaissances. "Entrevues à partir de diverses représentations". Banque de vidéos.
- Bednarz, N. et Janvier, B. "Le nombre et sa représentation" (activités diagnostiques sur la numération - 1ère, 2e et 3e années). Banque d'activités diagnostiques (tests, protocoles d'entrevue).
- Bednarz, N., Janvier, B. et Poirier, L. "La représentation des opérations" (représentations diverses, protocoles d'entrevue, banque de problèmes). Banque d'activités diagnostiques (tests, protocoles d'entrevue).
- Biron, D. et Rioux, S. Analyse complète des résultats de chacune des représentations (tableaux). Rapports internes.

VI. REFERENCES

- [1] Bednarz, N. et Janvier, B. (1982). "The understanding of numeration in primary school." Educational Studies in Mathematics.
- [2] Bednarz, N. et Janvier, B. (En préparation). "Application en milieu scolaire d'une recherche sur la numération - 1981 à 1983". Rapport complet.
- [3] Bednarz, N. Bélanger, M. et Janvier, C. (1981). "Un exemple de sur-symbolisation en enseignement des mathématiques". Instantanés Mathématiques, APAME.
- [4] Vergnaud, G. "L'enfant, la mathématique et la réalité". Chapitre sur les structures additives et chapitre sur les structures multiplicatives.
- [5] Hart, K. "The understanding of Mathematics in secondary schools".
- [6] Menninger, K. (1970). "Number World and Number Symbols". Mit Press.
- [7] Bednarz, N. et Janvier, B. (1983). "Problèmes de représentation d'une transformation en arithmétique". Journal de l'AMQ.
- [8] Bednarz, N. et Janvier, B. (1982). "Problèmes de représentation d'une transformation en arithmétique". Rapport complet, Compte-rendu du GEPREM, CIRADE.
- [9] Bélanger, M. et Erlwanger, S. (1983). "Interpretations of the equal sign". Proceedings of PME-NA.